1 Prvo predavanje - kompleksni brojevi, istorijska perspektiva

U predavanju se osvrćemo na hronologiju postepenog uvodjenja koncepta kompleksnog broja. Posebno ćemo izdvojiti direktne posledice pojedinih zaključaka. Koristimo uobičajene oznake za skupove brojeva.

1.1 Ars Magna

Centralna ličnost naše priče je Đirolamo Kardano, renesansni lik koji je, izmedju ostalog, svojoj burnoj biografiji godine 1545. dodao objavljivanje knjige *Ars Magna*[1]. Ovo delo je, uz Bombelijevu knjigu *L'Algebra* objavljenu 1572. godine, najznačajnije matematičko izdanje od antičkih vremena do kraja XVI veka.

U knjizi Ars Magna, Kardano je objavio izvodjenje formula za rešenje opšte algebarske jednačine trećeg i četvrtog stepena. Zanimljivo, u formulama se javljaju "fiktivna"i "nemoguća"rešenja koja danas ne smatramo ni fiktivnim ni nemogućim. Konkretno, Kardanova epoha ne poznaje nulu kao broj, niti negativne brojeve. Ipak, upravo na osnovama Ars Magne, Bombeli izvodi aritmetičke operacije negativnim brojevima, pa čak i pravila manipulisanja veličinama kod kojih se pod korenom nalazi negativan broj.

U nastavku ćemo koristiti savremene oznake uz napomenu da u Kardanovo vreme notacija nije bila razvijena, te su se postupci i formule navodili opisno.

Smatra se da je koren iz negativnog broja prvi put eksplicitno naveden u rešenju problema podele broja 10 na dva dela čiji proizvod daje 40. Kardano rešenje smatra beskorisnim, ali ga ipak navodi:

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

1.2 Kubna jednačina

Formula za rešenja kvadratne jednačine bila je poznata od VII veka (ako ne i ranije) kada je izložena u radu indijskog matematičara Bramagupte. Pogodnim smenama opšta jednačina trećeg stepena koja ima barem jedno pozitivno rešenje može se svesti na jedan od oblika $x^3 + mx = n$ ili $x^3 = mx + n$, za neke pozitivne brojeve m i n. S obzirom da su se negativna rešenja sve do druge polovine XVI veka smatrala fiktivnim/neupotrebljivim, jednačina oblika $x^3 + mx + n = 0$ se nije ni rešavala.

Pri tome, oblik $x^3 = mx + n$ je teži za rešavanje i, razumljivo, odgovarajuća formula je pronadjena nešto kasnije nego formula za rešavanje jednačine $x^3 + mx = n$. U modernoj notaciji, za $x^3 = mx + n$ rešenje koje je Kardano objavio glasi

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Na primer, rešenje jednačine $x^3 = 15x + 4$ (posmatrane u Bombelijevoj algebri iz 1572. godine) je

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

[1] Preciznije, Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis

Zanimljivo, rešenja ove jednačine su realna. Jedno od njih, $x = 4$ je Bombeli izveo manipulišući gornjom formulom (preostala dva rešenja su $-2 \pm \sqrt{3}$). To je prvi primer računa u kojem se algebarske operacije izvode nad izrazima kod kojih se javlja negativna potkorena veličina.

Luka Pačoli je u drugoj polovini XV veka tvrdio da kubne jednačine oblika $x^3 + mx = n$ ili $x^3 = mx + n$ nije moguće rešiti tada poznatim metodama. Ipak, izgleda da je del Fero još krajem XV veka rešio jednačinu $x^3 + mx = n$, a moguće je da je postojala beležnica u kojoj je del Fero izveo formule za rešenje oba problema. U to vreme znanja su se sakrivala od "neupućenih"i česti su bili "matematički dvoboji"u kojima je pobednik odnosio slavu. Povodom jednog takvog dvoboja Tartalja je otkrio formule koje će biti objavljene u Kardanovoj Ars Magni. Čak je poznato da se to desilo 12. i 13. februara 1535. godine[2]. Iako je Tartalja svoje otkriće ljubomorno čuvao, Kardano je nekako uspeo da ga nagovori da mu otkrije tajnu formulu. Nakon dugotrajnog odlaganja, Tartalja je, verovatno dobivši nešto zauzvrat, otkrio Kardanu formulu, uz uslov da je ovaj ne objavi. Ipak, Kardano je, nakon uvida u del Ferovu beležnicu, koju je nakon del Ferove smrti preuzeo jedan od njegovih učenika odlučio da prekrši obećanje dato Tartalji, što mu ovaj nikad nije oprostio.

Za nas je važno da napomenemo da Kardanove formule u opštem slučaju daju veoma komplikovan izraz i da su, sa praktičnog stanovišta, odgovarajući iterativni postupci nalaženja približne vrednosti korena često efikasniji od upotrebe formula. Na primer, $x = 1$ je očigledno rešenje jednačine $x^3 = 5x - 4$, a Kardanova formula daje

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-17/27}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-17/27}}.$$

Ipak, formule objavljene u Ars Magni predstavljaju prvo veliko otkriće u algebri nakon viševekovne stagnacije. Pri tome, njima se, kao što je više puta rečeno, uvodi račun sa izrazima kod kojih je potkorena veličina negativna.

Pouka: Premda se uvodjenje kompleksnih brojeva motiviše rešavanjem jednačine $x^2 + 1 = 0$, kao što smo videli, kubna jednačina je odigrala značajniju ulogu u toj epizodi matematičke povesti.

Račun sa veličinama koje sadrže korene iz negativnih brojeva je stagnirao više od sto godina nakon objavljivanja Ars Magne. O tome svedoči i prepiska Hajgensa i Lajbnica iz 1673. godine u kojoj Hajgens iskazuje čudjenje i nevericu nad jednakošću

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}.$$

1.3 Aritmetika kompleksnih brojeva

Već smo napomenuli da je prve korake u razvoju aritmetike kompleksnih brojeva učinio Bombeli. U stvari, on je značajno unapredio notaciju i od opisnog objašnjavanja prešao na simbole. Slovo R je koristio za kvadratni koren, *radix quadraticus*, a R^3 za kubni koren, *radix cubus*, p je simbol sabiranja, m oduzimanja, a zagrade uokviruju izraz na koji se odnosi posmatrana operacija. Tako je u Bombelijevoj algebri

$$\sqrt{4 + \sqrt{6}} \rightsquigarrow R\lfloor 4pR6 \rfloor, \quad \sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}} \rightsquigarrow R^3\lfloor 2pR\lfloor 0m121 \rfloor\rfloor.$$

[2]Reforma štarog", julijanskog kalendara je izvršena 1582. godine.

Tokom XVIII veka objavljeno je mnogo formula u kojima se javljaju kompleksni brojevi. Najslavnija je, svakako, Ojlerova formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, iz koje sledi, na primer, de Muavrova formula $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, $n \in \mathbb{Z}$. Oznaku $i = \sqrt{-1}$ uveo je Ojler 1748. godine.

Naziv *imaginarni broj* za koren negativnog broja je u vezi sa široko rasprostranjenim mišljenjem da se ove veličine javljaju samo tokom izvodjenja računskih operacija i nekako se poništavaju na kraju računa. Evo ilustrativnog primera.

Dokazati da je proizvod zbira kvadrata dva cela broja jednak zbiru kvadrata dva cela broja. Važi:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) \\ &= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di) = u^2+v^2,\end{aligned}$$

gde je $u = ac - bd$, $v = ad + bc$.

Tek sa geometrijskom interpretacijom kompleksnih brojeva afirmišu se Bombelijevi postupci sabiranja i množenja kompleksnih brojeva. Time se (u XIX veku) otvaraju vrata za sistematsko proučavanje kompleksnih brojeva. Pozicioniranje kompleksnih brojeva u koordinatnom sistemu koristili su Vesel i Argan, no tek je Gaus 1831. godine tu ideju produbio i definisao aritmetiku kompleksnih brojeva[3]. Otprilike u isto vreme, Hamilton razvija aritmetiku kompleksnih brojeva posmatrajući kompleksan broj kao uredjen par realnih brojeva, pa se element skupa kompleksnih brojeva $z \in \mathbb{C}$ identifikuje sa odgovarajućim izrazom $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Podsetimo se, algebarske operacije kompleksnim brojevima se uvode na očekivan način, pri čemu se deljenje realizuje racionalisanjem imenioca. Detalje ostavljamo za vežbu. Ovo se odnosi i na polarnu reprezentaciju, $z = re^{i\phi}$, $r \geq 0$, $\phi \in (-\pi, \pi]$. Predstavljanje kompleksnih brojeva u ravni omogućava fromulisanje jednostavne geometrijske interpretacije zbira i proizvoda kompleksnih brojeva.

Nije teško dokazati da skup kompleksnih brojeva sa operacijama sabiranja i množenja ima strukturu polja. Za razliku od polja realnih brojeva, u kojem postoji totalno uredjenje, u polju kompleksnih brojeva nije moguće uvesti relaciju totalnog poretka.

1.4 Dve magije kompleksnih brojeva

Osvrnućemo se samo na magiju izračunavanja korena pojedinih brojeva i na magiju rešavanja algebarskih jednačina.

Skup realnih brojeva nije dovoljan da obuhvati veličinu čiji je kvadrat jednak nekom negativnom broju. Tu je situacija slična onoj koja nastupa kada se ustanovi da skup razlomaka ne obuhvata veličinu čiji je kvadrat jednak broju 2, na primer. U oba slučaja se postojeća struktura na konzistentan način proširuje do nove strukture unutar koje postoji rešenje posmatranog problema. U iskušenju smo da pomislimo kako će se ista priča ponoviti pri pokušaju da za neki posebno odabran kompleksni broj odredimo veličinu koja pomnožena sa sobom daje taj broj. Medjutim, to se neće desiti. Kakav god kompleksni broj z da izaberemo, uvek postoji kompleksni broj ω tako da je $\omega^2 = z$. U stvari, ako je $z = a + ib$, onda je $\omega^2 = z$ za

$$\omega = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \right).$$

[3]Smatra se da je Gaus prvi upotrebio naziv kompleksni broj

Na primer, za $z = i$ formula daje $\omega = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Primetimo da postupak možemo da nastavimo i nadjemo $v \in \mathbb{C}$ za koje je $v^2 = \omega$.

Dakle, u ovom novom sistemu, skupu kompleksnih brojeva svaki broj ima kvadratni koren (ima ih, u stvari, dva). Ovo je samo početak magije. Umesto kvadratnog korena može se posmatrati ma koji realan koren kompleksnog broja (izuzev nule, kada se posmatra negativan koren). Pri tome se realan koren definiše kao što je to uradjeno u skupu realnih brojeva. Štaviše, nakon preciznog uvodjenja stepenovanja kompleksnog broja kompleksnim brojem, o čemu se studenti upoznaju na kursevima kompleksne analize, ispostavlja se da je rezultat kompleksnog korenovanja kompleksnog broja takodje kompleksan broj. Prva magija je dakle zatvorenost u odnosu na korenovanje - svojstvo koje nemaju ni racionalni ni realni brojevi.

Korenovanje kompleksnih brojeva imalo je ulogu u konstrukciji pravilnog 17-stranog poligona (heptadekagon) šestarom i lenjirom koju je dao 19-ogodišnji Gaus 1796. godine.

Druga magija izražava se *fundamentalnom teoremom algebre*:

Teorema 1.1. *Svaki kompleksni polinom pozitivnog stepena ima onoliko nula koliki je njegov stepen.*

Zainteresovani čitalac može da prouči dokaz u [1]. U dokazu se koristi: neprekidnost polinoma, Vajerštrasova teorema o neprekidnim funkcijama, činjenica da za svaki kompleksan broj z postoji njegov $n-$ti koren, to jest $w \in \mathbb{C}$ takav da je $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$ i D'Alamberova lema koja tvrdi da, ako je $P(z)$ polinom i $P(z_0) \neq 0$, onda u svakoj okolini tačke z_0 postoji w tako da važi: $|P(w)| < |P(z_0)|$.

Ekvivalentno tvrdjenje glasi: Svaki nekonstantni polinom sa kompleksnim koeficijentima ima barem jednu nulu u polju kompleksnih brojeva.

Ova teorema ima dugu istoriju, a konačno je dokazana tokom XIX veka. Direktna posledica fundamentalne teoreme algebre je faktorisanje polinoma na linearne činioce, slično rastavljanju celih brojeva na proste činioce (što se naziva fundamentalnom teoremom aritmetike). Naime, svaki polinom $P_n(z)$ stepena $n \in \mathbb{N}$ se može predstaviti kao proizvod tačno n faktora

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n),$$

pri čemu su kompleksni brojevi z_k, $k = 1, 2, \dots, n$ rešenja jednačine $P_n(z) = 0$. Pri tome, neki od brojeva z_k mogu da budu jednaki.

U polju realnih brojeva proizvoljna kvadratna jednačina drugog stepena ne mora da ima rešenja u tom polju, odnosno odgovarajući polinom drugog stepena ne mora da ima nule (korene) u skupu $\mathbb{R}$ (faktorizaciju na linearne činioce). Nasuprot tome, u polju kompleksnih brojeva *svaki* polinom stepena n sa kompleksnim koeficijentima ima n korena (jednakih ili različitih) u polju kompleksnih brojeva.

Ars magna sadrži formule za korene polinoma drugog, trećeg i četvrtog stepena. Za polinom petog stepena ne samo da nije postojala odgovarajuća formula u toj knjizi, nego je tek fundamentalnom teoremom algebre dokazana egzistencija korena u polju $\mathbb{C}$, dakle otprilike 3 veka nakon objavljivanja Ars Magne.

Konačno, rezultati teorije grupa impliciraju da se koreni opšte algebarska jednačina stepena $n \geq 5$ ne mogu dobiti formulom pomoću koeficijenata, algebarskih operacija i korenovanja. Ovaj rezultat je poznat u algebri kao Abel-Rufini teorema koju je Abel dokazao 1823. godine. Nezavisno od Abela, istu teoremu je dokazao Galoa, a objavljena je posthumno 1846. godine, 14 godina nakon njegove smrti.

Čitaocu skrećemo pažnju na filozofski problem. Formula za koren alegebarske jednačine nije pronadjena jer nije ni mogla biti pronadjena. Potraga za rešenjem nekog problema podrazumeva sasvim drukčiji pristup nego dokazivanje da taj isti problem ne može biti rešen.

1.5 Korenovanje kao višeznačna funkcija

Uporedjujući odgovarajuće razvoje u stepeni red, Ojer je 1740-tih godina izveo formulu $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ (formula je objavljena u Ojlerovom udžbeniku 1748. godine).

Iz ove formule sledi da je eksponencijalna funkcija periodična sa periodom $2\pi i$ kao i da je

$$(\cos x + i \sin x)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, za zadato $n \in \mathbb{N}$, jednačina $z^n = 1$ ima n različitih rešenja u kompleksnoj ravni:

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Ove tačke u kompleksnoj ravni leže na jediničnoj kružnici i mogu se intepretirati kao temena pravilnog n-tostranog poligona.

Tako, jednačina $z^n - 1 = 0$ ima n kompleksnih rešenja. Ovo je poseban slučaj fundamentalne teoreme algebre.

Činjenica da jednačina $z^n = \omega$ za zadati broj $\omega \in \mathbb{C}$ i ceo broj $n \geq 2$ ima više rešenja znači da je funkcija $f : \omega \mapsto \omega^{1/n}$ višeznačna. Opštije, stepenovanje kompleksnog broja kompleksnim brojem je višeznačna funkcija, što sledi iz polarne reprezentacije kompleksnog broja i periodičnosti eksponencijalne funkcije. Ovo je u oštrom kontrastu sa stepenovanjem/korenovanjem realnih brojeva. Prema tome, svojstva koja su posledica jedinstvenosti ovih operacija u skupu realnih brojeva (jasno, u slučaju kada su one dobro definisane), u opštem slučaju ne važe za kompleksne brojeve. Tu spadaju na primer formule $(ab)^x = a^x b^x$, $(a^x)^y = a^{xy}$, koje važe kada $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, ali ne važe za sve $a, b, x, y \in \mathbb{C}$.

Na kraju navodimo da se kompleksni brojevi suštinski primenjuju u algebarskoj i analitičkoj teoriji brojeva, realnoj analizi (teoriji brojevnih i stepenih redova, nesvojstvenih integrala,...), teoriji funkcija kompleksne promenljive, kao i u oblastima izvan čiste matematike: teoriji upravljanja, dinamici fluida, elektromagnetizmu, signalnoj analizi, kvantnoj mehanici...

1.6 Vežbe i pitanja za ponavljanje gradiva

1. Razjasniti sledeće paradokse:

   a) $-1 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$

   b) Iz $e^{2\pi ik} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, sledi $e = ee^{2\pi ik} = e^{1+2\pi ik}$, pa je

   $$e = e^{1+2\pi ik} = (e^{1+2\pi ik})^{1+2\pi ik} = e^{1+4\pi ik - 4\pi^2 k^2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

   Kako je $e^{4\pi ik} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, dobija se

   $$e = ee^{-4\pi^2 k^2} \Rightarrow 1 = e^{-4\pi^2 k^2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dobijena formula je tačna samo za $k = 0$. Za $k = 1$, na primer, dobija se $e^{4\pi^2} = 1$.

2. Utvrdi gradivo uz pomoć sledećih pitanja.

   a) Kako se zove najznačajnije Kardanovo matematičko delo, kada je objavljeno i po čemu je naročito poznato?

   b) Kako se zove Bombelijeva knjiga i po čemu je ona značajna?

   c) Po čemu se posebno razlikuje polje kompleksnih brojeva u odnosu na polja racionalnih i realnih brojeva (što smo u tekstu nazvali prvom magijom kompleksnih brojeva)?

   d) Kako glase Ojlerova formula i fundamentalna teorema algebre?

   e) Izvesti formulu (1) za rešenja jednažine $z^n = 1$.

   f) Po čemu je specifično korenovanje, odnosno stepenovanje kompleksnih brojeva? Navesti primer koji ilustruje tu specifičnost.

Literatura

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from the Book, Springer, Berlin, 2009.

[2] M. Božić, Pregled istorije i filozofije matematike, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[3] R. Courant, H. Robbins, revised by I. Stewart, What is Mathematics, Oxford University Press, 1996.

[4] I. Kleiner, Excursions in the History of Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2012.